



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

## SPECIÁLNÍ PLOCHY

SPECIAL SURFACES

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

#### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Erik Ochodnický

#### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.

BRNO 2017



## Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky  
Student: **Erik Ochodnický**  
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství  
Studijní obor: Matematické inženýrství  
Vedoucí práce: **prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.**  
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### Speciální plochy

#### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce bude věnována vybraným partiím z klasické diferenciální geometrie ploch. Konkrétně se jedná o speciální plochy, tj. např. o rotační plochy, plochy s konstantní Gaussovou křivostí, Clairotovy plochy apod.

#### Cíle bakalářské práce:

Cílem práce je vytvořit přehled speciálních ploch a popsat jejich vlastnosti.

#### Seznam doporučené literatury:

GRAY, A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces. CRC Press. 1997. ISBN 0-849-7872-9.

BUDINSKÝ, B. a B. KEPR. Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi. SNTL Praha. 1970. ISBN 04-014-70.

DOUPOVEC, M. Diferenciální geometrie a tenzorový počet. Skriptum VUT Brno. 1999. ISBN 80-21-1470-7.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## Abstrakt

Cieľom mojej bakalárskej práce je vytvoriť prehľad špeciálnych plôch a popísať ich vlastnosti. Za najdôležitejšie kategórie plôch som považoval plochy rotačné, minimálne, s predpísanou Gaussovou krivosťou a hlavne Clairotove plochy. Ku každej kategórii doložím z môjho pohľadu najdôležitejšie príklady plôch, s ich parametrizáciou a vlastnosťami a popíšem ich. Ku plochám uvediem množstvo obrázkov vytvorených pomocou MATLABu. V poslednej časti sa budem venovať výlučne Clairotovým plochám, hľadaniu geodetík na týchto plochách a ich vykresleniu. Ponúknem originálne obrázky geodetík na čo najväčšom počte plôch.

## Summary

The aim of this thesis is to create an overview of special surfaces and to define their characteristics. Categories of surfaces that I found the most important are surfaces of revolution, minimal, with constant Gaussian curvature, and finally Clairaut surfaces. For every category I'll introduce, in my opinion, the most important examples of surfaces along with their parametrizations and I'll describe them. Surfaces will be accompanied by images, created in MATLAB. In the last part I'm going to focus on Clairot patches, on finding geodesics on these surfaces and their description. I'll show numerous original images of geodesics on diverse surfaces.

## Klíčová slova

Geodetiky, rotačná plocha, minimálna plocha, Clairotova plocha, Gaussova krivosť

## Keywords

Geodesics, surface of revolution, minimal surface, Clairot surface, Gaussian curvature

ERIK OCHODNICKÝ *Špeciálne plochy*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 36 s. Vedoucí diplomové práce prof. Rndr. Miroslav Doupovec, CSc., dr.h.c

Prehlasujem že som prácu vypracoval samostatne podľa pokynov vedúceho a výlučne za pomoci uvedenej literatúry.

Erik Ochodnický

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Teoretická časť</b>	<b>3</b>
2.1	Krivky . . . . .	3
2.1.1	Dĺžka krivky . . . . .	4
2.1.2	Krivosť . . . . .	5
2.2	Plochy . . . . .	6
2.2.1	Definícia plôch . . . . .	6
2.2.2	Prvá základná forma (1ZF) . . . . .	8
2.2.3	Druhá základná forma (2ZP) . . . . .	9
2.2.4	Zobrazenie z plochy na plochu . . . . .	10
2.2.5	Geodetiky . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Špeciálne plochy</b>	<b>12</b>
3.1	Rotačné plochy . . . . .	12
3.1.1	Dôležité čiary: . . . . .	13
3.1.2	Najdôležitejšie rotačné plochy: . . . . .	13
3.2	Minimálne plochy . . . . .	15
3.3	Plochy s predpísanou Gaussovou krivosťou . . . . .	18
3.3.1	Plochy s nulovou GK . . . . .	18
3.3.2	Plochy s konštantnou GK . . . . .	18
3.4	Clairotove plochy . . . . .	24
3.4.1	Geodetické krivky (pokračovanie) . . . . .	24
3.4.2	Clairotove plochy . . . . .	26
3.4.3	Geodetiky rotačných plôch . . . . .	30
3.4.4	Geodetiky obecných plôch . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Záver</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>Zoznam použitých skratiek a symbolov</b>	<b>35</b>

# 1. Úvod

Moja bakalárska práca nesie názov Špeciálne plochy. Jedná sa o rešerš v oblasti diferenciálnej geometrie, pojednávajúcu hlavne o plochách, ktoré sú v určitom zmysle špeciálne. Práca je zameraná na podrobný popis a charakteristiku plôch, na objasnenie vzťahov medzi jednotlivými kategóriami a na vyzdvihnutie zaujímavostí u typov plôch. Úvod práce je čisto teoretický a dá sa považovať za krátku zbierku podávajúcu základnú teóriu okolo tematiky plôch. Teória je vysvetlená čo najjednoduchšie aby ju pochopil bežný čitateľ a aby čo najjasnejšie odrážala matematický pohľad na geometriu plôch.

Cieľ tejto práce je podať prehľad, no navyše sa pokúsim o vytvorenie vlastných obrázkov na ilustráciu príkladov a ich lepšie pochopenie. Použil som software MATLAB z dôvodu jednoduchého rozhrania a pripravených funkcií, pomocou ktorých sa plochy a krivky jednoducho zobrazujú. Keďže je téma mojej práce značne obsírna, typov plôch je mnoho a každú kategóriu možno osobitne rozpracovať na celý rozsah bakalárskej práce, tak som bol nútený nezachádzať hlbšie do podrobností. Ku každému typu plôch poskytnem iba základné príklady a zameriam sa skôr na opis celej triedy a vzťahov ktoré pre dané plochy platia.

V spomenutej teoretickej časti uvediem definície a zavedenia matematických termínov, potrebných k pochopeniu plôch spomenutých v druhej časti. Najprv zavediem pojem krivky a jej krivosti. Následne zadefinujem plochu, jej základné formy a krivosti plochy (Gaussova, hlavná, normálová, geodetická) a nakoniec spomeniem aj definíciu geodetiky.

V druhej časti sa budem venovať plochám rotačným, minimálnym, plochám s konštantnou Gaussovou krivosťou ale predovšetkým rozoberiem teóriu okolo Clairotovych plôch. Jedná sa o plochy na ktorých je riešenie geodetických rovníc omnoho jednoduchšie ako u iných. Riešenie určuje polohy všetkých geodetík na danej ploche. Jedným z mojich hlavných cieľov bolo taktiež vytvoriť obrázky daných geodetík na plochách pre čo najviac situácií. Tomu mi pomohol Matlab, v ktorom som vytvoril skript na počítanie základných foriem plochy a riešenie diferenciálnych rovníc geodetík. Sú k dispozícii obrázky katenoidu, helikoidu, pseudosféry, Diniho plochy, Kuenovej plochy a iných. Pomerne hlbšie spomeniem aj rotačné plochy s konštantnou Gaussovou krivosťou, kde uvediem odvodenie ich tvoriacich kriviek.

Pri hľadaní obrázkov geodetík som si všimol značného nedostatku materiálov na internete a preto som si za cieľ zadal vytvoriť čo najviac názorných obrázkov geodetík na plochách.



## 2. Teoretická časť

### 2.1. Krivky

**Definícia(1)**  $n$ -rozmerný Euklidovský priestor  $E_n$  je neprázdna množina všetkých usporiadaných  $n$ -tíc  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , kde je definovaná metrika  $\rho$  ľubovoľných dvojíc bodov  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  a  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  ako:

$$\rho(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

$n$ -ticu  $X$  nazývame bod euklidovského priestoru a čísla  $x_1 \dots x_n$  nazývame súradnice bodu  $X$ .

**Definícia(2)** Symbolom  $V_n$  budeme značiť unitárny priestor rozmeru  $n$  so skalárnym súčinom  $u \cdot v = \sum u_i v_i$ , kde  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  a  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Norma vektoru  $u$  v unitárnom priestore je definovaná nasledovne:  $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$ ,  $u \in V_n$ . Norma určuje veľkosť vektoru  $u$ .

**Definícia(3)** Vektorová funkcia  $v : I \rightarrow V_n$  na intervale  $I$ , má v bode  $t_0 \in I$  limitu  $v(t_0) \in V_n$ , ak pre každé  $\epsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$ , tak že pre  $t \neq t_0$ :

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|v(t) - v(t_0)\| < \epsilon$$

Vektorová funkcia  $v$  je *spojitá v bode*  $t_0$  ak platí:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = v(t_0).$$

**Definícia(4)** Deriváciou vektorovej funkcie  $f : I \rightarrow V_n$  v bode  $t_0$  rozumieme limitu  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$ . Ak limita neexistuje, tak funkcia  $f$  v bode  $t_0$  deriváciu nemá. Deriváciu

značíme symbolom:  $f'(t_0) = \frac{dv(t_0)}{dt} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$ . Analogicky sme schopní definovať derivácie vyššieho stupňa, ak opakovane aplikujeme limitu na funkciu  $f$ .

**Poznámka(1)** Majme bázu vektorového priestoru  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Platí, že pre ľubovoľné  $t \in I$  je  $v(t) = v_1(t)e_1 + v_2(t)e_2 + \dots + v_n(t)e_n$ , kde lednotlivé  $v_i(t)$  nazývame  $i$ -té zložky vektoru  $v$ .

Samozrejme platí, že vektorová funkcia  $v : I \rightarrow V_n$  v bode  $t_0 \in I$  je spojitá práve vtedy, keď sú spojité všetky jej zložky. Z toho vyplýva, že vektorová funkcia  $v(t)$  má v bode  $t_0 \in I$  deriváciu, ak majú v tomto bode deriváciu všetky jej zložky. Platí  $\frac{dv(t_0)}{dt} = \left( \frac{dv_1(t_0)}{dt}, \dots, \frac{dv_n(t_0)}{dt} \right)$ . Tvrdenie platí aj pre derivácie vyššieho rádu.

**Definícia(5)** Povedzme, že vektorová funkcia  $v$  je triedy  $C^r$  na  $I$  práve vtedy, ak má na  $I$  spojité všetky derivácie do rádu  $r$  včetne.

**Definícia(6)** Zobrazenie  $f : I \rightarrow E_n$  tak že  $I \subseteq \mathbb{R}$  sa nazýva *pohyb v priestore  $E_n$* , kde  $E_n$  značí  $n$ -rozmerný Euklidovský priestor. Vektor  $f' = \frac{df}{dt}$  nazveme vektor rýchlosti pohybu  $f$ .

**Definícia(7)** Pohyb  $f : I \rightarrow E_n$  sa nazýva *regulárny*, ak platí, že  $\frac{df}{dt} \neq \vec{0}$  pre  $\forall t \in I$ . Pokiaľ  $\frac{df(t_0)}{dt} = \vec{0}$  tak sa bod  $f(t_0) \in E$  nazýva *singulárny bod*.

**Príklad:** Príkladom regulárneho pohybu môže byť napríklad  $f(t) = (\cos(t), \sin(t), a)$  kde  $a \in \mathbb{R}$ . Keďže  $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$  tak je jasné že neexistuje  $t \in I$ , také že by bol  $\sin(t)$  a zároveň  $\cos(t)$  rovný nule. Z toho vyplýva, že pohyb  $f$  je regulárny na  $I = \mathbb{R}$ .

**Definícia(8)** Množia  $C \subseteq E_n$  sa nazýva *jednoduchá krivka triedy  $C_r$*  ak existuje jednoduchý regulárny pohyb  $f : I \rightarrow E_n$  triedy  $C^r$  taký, že platí  $C = f(I)$ . Zobrazenie  $f$  sa nazýva *parametrizácia krivky  $C$* .

**Definícia(9)** Podmnožina  $C \subset E_n$  sa nazýva *krivka* triedy  $C^r$ , ak pre všetky body  $X \in C$  existuje okolie  $U \subseteq E_n$  že  $C \cap U$  je jednoduchá krivka triedy  $C^r$ . Parametrizácie týchto prienikov nazývame *lokálne parametrizácie* krivky  $C$ .

**Definícia(10)** Dve krivky  $C$  a  $\bar{C}$  majú v bode  $X$  styk  $k$ -teho rádu, práve vtedy ak existujú ich lokálne parametrizácie pre ktoré platí:

$$\frac{d^i f(s_0)}{ds^i} = \frac{d^i \bar{f}(s_0)}{ds_i} \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Platí že  $X = f(s_0) = \bar{f}(s_0)$  je spoločným bodom pre  $C$  a  $\bar{C}$

### 2.1.1. Dĺžka krivky

Jedná sa o najdôležitejšiu vlastnosť krivky, ktorá nezávisí na jej parametrizácii.

**Definícia(11)** Majme krivku s parametrizáciou  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  definovanú na intervale  $\langle a, b \rangle$ . Potom *dĺžkou krivky  $\gamma$  na intervale  $\langle a, b \rangle$*  rozumieme:

$$s = \int_a^b \left\| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\| dt \quad (2.1)$$

Z matematickej analýzy je známi vzorec pre dĺžku krivky  $C \subset E_n$  s parametrizáciou  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$  od  $f(t_1)$  do  $f(t_2)$ :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left( \frac{df_1(\tau)}{d\tau} \right)^2 + \dots + \left( \frac{df_n(\tau)}{d\tau} \right)^2} d\tau$$

Môžeme si všimnúť, že vzorce sú v súlade. Je samozrejmé, že dĺžka krivky by nemala závisieť na jej parametrizácii a dá sa dokázať že na nej skutočne nezávisí. [3]

**Definícia(12)** Zobrazenie  $f : D \rightarrow E_n$ , s vlastnosťou  $\left\| \frac{df}{ds} \right\| = 1$  nazveme *parametrizáciou oblúkom* jednoduchej krivky  $C = f(D)$  pre všetky  $s \in D$ . Teda pohyb po krivke má jednotkovú rýchlosť. Následne parameter  $s$  nazveme *oblúk* alebo *prirodzený parameter*.

Z definície oblúku je vidno že prirodzený parameter  $s$  priamo určuje dĺžku krivky  $f$ . Platí vzťah pre výpočet parametru, ktorý je rovnaký ako vzorec pre výpočet dĺžky krivky pre  $t \in \langle t_0, t \rangle$ :

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{df_1(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \dots + \left(\frac{df_n(\tau)}{d\tau}\right)^2} d\tau$$

Pre uhol  $\theta$  dvoch vektorov  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  platí:

$$\cos(\theta) = \frac{(a \cdot b)}{\|a\| \|b\|} \quad (2.2)$$

### 2.1.2. Krivosť

Krivosť  $\kappa$  vyjadruje rýchlosť zmeny jednotkového dotykového vektoru resp. jeho zmenu smeru. Súhlasí to s ideou že čím je krivka viac krivá, tým je hodnota krivosti väčšia. Samozrejme krivosť má zmysel uvažovať hlavne pre iné krivky ako priamka, ktorá má krivosť  $\kappa = 0$ . Logicky by malo platiť že krivosť kružnice je konštantná pre všetky jej body.

Najprv zavediem vektor  $e_1 = \frac{d\gamma(t)}{ds}$ . Krivka  $\gamma$  je parametrizovaná oblúkom z čoho vyplýva, že  $\|e_1\| = 1$ . Jednotkový vektor v smere vektoru druhej derivácie krivky  $\gamma$  nazveme  $e_2 = \frac{de_1}{ds}$ . Platí že vektory  $e_1$  a  $e_2$  sú navzájom kolmé.

Krivosť zavediem nasledovne:

**Definícia(13)** Krivosťou  $\kappa(s_0)$  krivky  $\gamma : I \rightarrow E_2$  v bode  $s_0$  rozumieme pomer medzi vektorom prvej derivácie v bode  $s_0$  a vektorom  $e_2(s_0)$ .

$$\kappa(s_0) = \frac{\frac{de_1}{ds}}{e_2} = \left\| \frac{de_1}{ds} \right\| \quad (2.3)$$

Je to teda veľkosť druhej derivácie krivky  $\gamma$  s prirodzenou parametrizáciou. Mimo iného je zároveň prevrátenou hodnotou polomeru oskulačnej kružnice.

[2]

## 2.2. Plochy

V tejto časti sa budeme zaoberať vyjadrením a manipuláciou s plochami v trojrozmernom Euklidovskom priestore  $E_3$ . Pre vyjadrenie plôch v  $E_3$  budeme potrebovať vektorové funkcie viacerých premenných. Preto si definujeme zobrazenie  $w : D \rightarrow V_3$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  ako *vektorovú funkciu dvoch premenných* tak, že limity, spojitosť, derivácie určíme analogicky z kriviek v  $\mathbb{R}^2$ . Zavedené pojmy budeme využívať pri rôznych typoch špeciálnych plôch.

### 2.2.1. Definícia plôch

**Limita:**  $w$  má v bode  $(u_0, v_0) \in D$  limitu  $w_0 \in V_3$  ak pre každé  $\epsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak že pre  $\forall (u, v) \in D$  také že  $|u - u_0| < \delta, |v - v_0| < \delta, (u, v) \neq (u_0, v_0)$  platí:

$$\|w(u, v) - w(u_0, v_0)\| < \epsilon.$$

Značíme:  $\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0,v_0)} w(u, v) = w_0$

**Spojitosť:** Vektorová funkcia  $w$  je spojitá v bode  $(u_0, v_0)$  práve vtedy ak:

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0,v_0)} w(u, v) = w(u_0, v_0)$$

$w$  je spojitá na  $I$  ak je spojitá v každom bode ma intervale  $I$ .

**Derivácia:** Definujeme parciálnu deriváciu ako:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(u_0, v_0)}{\partial u} &= \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{w(u, v_0) - w(u_0, v_0)}{u - u_0} \\ \frac{\partial w(u_0, v_0)}{\partial v} &= \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{w(u_0, v) - w(u_0, v_0)}{v - v_0} \end{aligned}$$

Vyššie parciálne derivácie definujeme analogicky .

**Ďalšie vlastnosti:** Platí že vektorová funkcia  $w$  je spojitá práve vtedy ak má spojité všetky zložky. Pišeme  $w(u, v) = (w_1(u, v), w_2(u, v), w_3(u, v))$  kde  $i$ -tou zložkou rozumieme  $w_i(u, v)$ . Parciálna derivácia teda vyzerá nasledovne:

$$\frac{\partial w}{\partial u_1} = \left( \frac{\partial w_1}{\partial u_1}, \frac{\partial w_2}{\partial u_1}, \frac{\partial w_3}{\partial u_1} \right)$$

Platí že vektorová funkcia  $w$  je triedy  $C^r$  na intervale  $D$  práve vtedy, ak má na  $D$  spojité všetky parciálne derivácie do rádu  $r$  včetne.

Majme zobrazenie  $f : D \rightarrow E_3$  a počiatok  $P \in E_3$ . Aby sme pre zobrazenie  $f$  mohli definovať tiredu  $C^r$  je nutno zaviesť prievodič. Pre každý bod  $(u, v) \in D$  určíť tzv. **prievodič** bodu  $f(u, v)$  ako vektor  $(\mathbf{P} - \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \in V_3$ . Dostaneme vektorovú funkciu  $\overrightarrow{Pf} : D \rightarrow V_3$  pre ktorú poznám parciálne derivácie. Definujem parciálne derivácie  $f$  ako

$$f'_u = \frac{\partial(\overrightarrow{Pf})}{\partial u}, f'_v = \frac{\partial(\overrightarrow{Pf})}{\partial v}$$

Je nutno dokázať že  $f'_u$  a  $f'_v$  nezávisia na voľbe počiatku  $P$ .

**Dôkaz:** Predpokladáme iný počiatok  $Q \in E_3 : Q \neq P$ .

Teda  $\overrightarrow{Pf} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Qf}$  a deriváciou podľa  $t$  dostaneme  $\frac{d(\overrightarrow{Pf})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{Qf})}{dt}$  pretože  $\frac{d(\overrightarrow{PQ})}{dt} = 0$ . Vyplýva z toho nezávislosť volby počiatočného bodu, pri určovaní parciálnej derivácie.

Povedzme že zobrazenie  $f : D \rightarrow E_3$  je triedy  $C^r$ , v prípade ak  $\overrightarrow{Pf} : D \rightarrow V_3$  je vektorová funkcia triedy  $C^r$ .

**Definícia(14)** Množina  $S \subset E_3$  sa nazýva *jednoduchá plocha* triedy  $C^r$ , ak existuje zobrazenie  $f : D \rightarrow E_3$  triedy  $C^r$ , kde  $D \subset \mathbb{R}^2$  je otvorená množina také, že  $S = f(D)$  a derivácie  $f'_u, f'_v$  sú lineárne nezávislé v každom bode z  $D$ . Zobrazenie  $f$  sa nazýva *parametrizácia* plochy  $S$  a množina  $D$  *oblasťou parametrov*. Lineárna nezávislosť dotyčnicových vektorov zaručuje existenciu dotyčnicovej roviny plochy  $S$  v každom jej bode. Táto podmienka sa dá zapísať aj pomocou skalárneho súčinu:  $f'_u \times f'_v \neq \vec{0}$ . Nerovnosť zaručuje nekolineárnosť vektorov  $f'_u$  a  $f'_v$  ktoré určujú dotyčnicovou rovinu.

**Definícia(15)** Množina  $S \subset E_3$  sa nazýva **plocha triedy**  $C^r$ , ak pre každý bod  $X \in S$  existuje okolie  $\mathcal{O}_X$  tak, že prienik  $\mathcal{O}_X \cap S$  je *jednoduchá plocha* triedy  $C^r$ . Jednotlivé prieniky nazývame *lokálne parametrizácie* plochy  $S$ .

**Zadanie plochy:** Pozn.: U každého spôsobu zadania plochy uvediem ako vyzerá zápis pre sféru polomeru  $r$ .

1. Plocha môže byť určená *parametricky*, to značí že je zadaná v tvare

$$f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$$

Tento tvar je často využívaný, pretože nie vždy je odvoditeľný explicitný tvar. Pre guľu je parametrické vyjadrenie tvaru:  $f(u, v) = (r \cos(u) \cos(v), r \cos(v) \sin(u), r \sin(v))$ .

2. V mnohých prípadoch je plocha určená tzv. *explicitne*, alebo je hľadané jej explicitné zadanie. Plocha  $S$  je v tvare grafu funkcie  $h = g(x, y)$  triedy  $C^r$  na množine  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Potom plocha  $S$  je jednoduchá plocha triedy  $C^r$ , s parametrizáciou  $f(x, y) = (x, y, g(x, y))$ . Je jasné že vektory  $f'_x = (1, 0, g'_x)$  a  $f'_y = (0, 1, g'_y)$  sú nekolineárne. Je nutné overiť nekolineárnosť dotyčnicových vektorov, a body kde neexistuje dotyčnicová rovina vylúčiť. Celú sféru nieje možné vyjadriť jedným explicitným výrazom, preto uvediem iba explicitný tvar hornej polosféry:  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
3. *Implicitný* tvar vyzerá nasledovne:  $F(x, y, z) = 0$ . Množina  $S$  splňujúca spomenutú rovnicu je plocha triedy  $C^r$ , ak pre ľubovoľný bod  $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$  platí že  $(F'_x(X_0), F'_y(X_0), F'_z(X_0)) \neq \vec{0}$ . Ak podmienka platí tak je v každom bode možné rovnicu explicitne vyjadriť aspoň pomocou jednej premennej.

Sféra:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

**Veta(1)** Majme jednoduchú krivku  $c$  zadanú v oblasti  $D$  s parametrickým vyjadrením  $\gamma : I \rightarrow D; \gamma(t) = (u(t), v(t))$ . Majme plochu  $S$  s parametrizáciou  $f : D \rightarrow E_3$ . Potom zložené zobrazenie  $f \circ \gamma : I \rightarrow E_3; (f \circ \gamma)(t) = f(u(t), v(t))$  je parametrizáciou krivky  $C$  ktorá leží na ploche  $S$ .

Podmienka regularity je splnená pretože vektory  $f'_v$  a  $f'_u$  sú lineárne nezávislé a platí:

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt} \neq \vec{0}, \forall t \in I$$

**Veta(2)** Koncové body dotyčnicových vektorov ku všetkým krivkám na ploche  $S$  v bode  $X \in S$  vyplnia rovinu ktorú budeme značiť  $\tau_X S$ . Jedná sa o *dotyčnicovú rovinu plochy  $S$  v bode  $X$* . Jej zameranie  $\{\vec{AB}; A, B \in \tau_X S\}$  sa nazýva dvojrozmerný dotykový priestor  $\mathbf{T}_X S$ .

### 2.2.2. Prvá základná forma (1ZF)

Pre zavedenie prvej základnej formy je treba zaviesť bilineárnu formu.

**Bilineárna forma** je zobrazenie  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ktoré je pre obidve zožky lineárne. **Kvadratická forma** je zobrazenie  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ , v prípade, že existuje bilineárna forma značená  $f$ , taká že  $g(v) = f(v, v); \forall v \in V$ .

Majme plochu  $S$  s parametrizáciou  $f(u, v)$  a dotyčnicovou rovinou v bode  $X = f(u_0, v_0)$  značenou  $\tau_X S$ , určenou dotyčnicovými vektormi  $f'_u(u_0, v_0)$ ,  $f'_v(u_0, v_0)$ . Ľubovoľná dvojica dotyčnicových vektorov  $a, b$  sa dá vyjadriť pomocou lineárnej kombinácie vektorov  $f'_u$  a  $f'_v$ . Píšeme  $\mathbf{a} = a_1 f'_u + a_2 f'_v$  a  $\mathbf{b} = b_1 f'_u + b_2 f'_v$ . Pre skalárny súčin  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  platí:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 (f'_u \cdot f'_u) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) (f'_u \cdot f'_v) + a_2 b_2 (f'_v \cdot f'_v)$ .

Zavedieme značenie:

$$g_{11} = (f'_u \cdot f'_u) \quad g_{12} = (f'_u \cdot f'_v) \quad g_{22} = (f'_v \cdot f'_v)$$

Skalárny súčin  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  je symetrická bilineárna forma a  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$  je kvadratická forma ktorá určuje druhú mocninu veľkosti vektoru  $\mathbf{a}$ .

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = ||\mathbf{a}||^2 = g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + g_{22}a_2^2 \quad (2.4)$$

**Definícia(16)** Kvadratická forma 2.4 sa nazýva *Prvá základná forma (1ZF)* plochy  $S$  a značí sa  $\varphi_1(a)$ . Jednotlivé  $g_{ij}$  nazveme *koefficienty prvej základnej formy*. Po preznačení vektoru  $\mathbf{a} = (du, dv)$  dostaneme:

$$\varphi_1 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2 \quad (2.5)$$

*Poznámka:* Niekedy je zvykom značiť príslušné koefficienty 1ZF ako  $g_{11} = E, g_{12} = F, g_{22} = G$ . Prvá základná forma plochy sa využíva napr. pri výpočte plošného obsahu plochy, alebo pri výpočte dĺžky krivky na ploche. Platí, že pre plochu zadanú explicitne rovnicou  $z = f(x, y)$  sú jednotlivé koefficienty jej 1ZF rovné :

$$g_{11} = 1 + f_x'^2 \quad g_{12} = f'_x \cdot f'_y \quad g_{22} = 1 + f_y'^2$$

**Plošný obsah:** Z matematickej analýzy je známy vzorec pre výpočet plošného obsahu ohraničenej plochy  $f(u, v)$  zadanej parametricky na ohraničenej oblasti  $D \subset \mathbb{R}^2$  :

$$S = \iint_D \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (2.6)$$

**Dĺžka:** Dá sa dokázať, že výpočet dĺžky krivky  $\gamma : (a, b) \rightarrow R_n$  ktorá leží na ploche  $S$  závisí na 1ZF plochy  $S$ . Po dosadení do vzorca 2.1 0dostaneme:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g_{22} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} dt \quad (2.7)$$

[3]

**Uhol dvoch kriviek na ploche:** Pomocou 1ZF plochy a dvoch dotyčnicových vektorov  $\vec{a}, \vec{b}$  kriviek na ploche sme schopný vyjadriť ich uhol  $\theta$  v bode ich dotyku . Vyjadríme si dotyčnicové vektory  $\vec{a} = a_1 f'_u + a_2 f'_v, \vec{b} = b_1 f'_u + b_2 f'_v$ .

$$\cos(\theta) = \frac{\sum_{i,j} |g_{ij} a_i b_j|}{\sum_{i,j} (\sqrt{g_{ij} a_i a_j}) (\sqrt{g_{ij} b_i b_j})} \quad i, j = 1, 2. \quad (2.8)$$

### 2.2.3. Druhá základná forma (2ZP)

2ZF je kvadratická forma vyjadrená pomocou druhých derivácií  $f$  a normálového vektoru plochy. Slúži hlavne na vyjadrenie tzv. *normálovej krivosti plochy*  $S$ . *Neorientovateľnou plochou* rozumieme plochu, na ktorej existuje uzatvorená krivka, taká, že pri pohybe po nej prejde normálový vektor  $n$  na opačný  $-n$ . Na orientovateľnej ploche takáto krivka neexistuje.

**Definícia(17)** *Jednotkovým normálovým vektorom* plochy  $S$  v každom jej bode  $X \in S$  rozumieme  $n_X = \frac{f'_u \times f'_v}{\|f'_u \times f'_v\|}$ .

**Definícia(18)** *Normálová krivosť* krivky  $\mathcal{C}$  ktorá leží na ploche  $\mathcal{S}$  v bode  $X$  je definovaná ako

$$\kappa_n = n \cdot \frac{d^2 \gamma}{ds^2}$$

Geometrický význam je jasný, jedná sa o kolmý priemet vektoru krivosti do smeru normálového vektoru  $n$ .

Zároveň platí ,že pre ľubovoľné krivky na ploche  $\mathcal{S}$  prechádzajúce bodom  $X$ , majúce v tomto bode rovnakú dotyčnicu, je ich normálová krivosť rovnaká(Dôkaz napr. v [2] str. 57). Preto môžeme uvažovať pojem *normálová krivosť plochy*  $\mathcal{S}$  v smere  $\vec{a} \in \mathbf{T}_X \mathcal{S}$ .

**Definícia(19)** *Normálová krivosť plochy*  $\mathcal{S}$  v smere  $\vec{a} \in \mathbf{T}_X \mathcal{S} : \vec{a} = \frac{d\gamma}{ds}$  a platí  $\|\vec{a}\| = 1$  je rovná :

$$\kappa_n^a = n \cdot \frac{d^2 \gamma}{ds^2}$$

**Definícia(20)** Zavedieme *Druhú základnú formu* ako :

$$\varphi_2 := h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2$$

kde jednotlivé  $h_{ij}$  sú koeficienty druhej základnej formy dané

$$h_{11} = n \cdot f''_{uu}, h_{12} = n \cdot f''_{uv}, h_{22} = n \cdot f''_{vv}$$

Platí že normálová krivosť plochy sa dá vyjadriť ako pomer druhej a prvej základnej formy. Ak označíme  $\vec{a} = (du, dv) \in \mathbf{T}_X \mathbf{S}$  dostaneme

$$\kappa_n^a = \frac{\varphi_2(a)}{\varphi_1(a)}$$

**Hlavné krivosti** v bode  $X$  značia dve extrémálne hodnoty normálových krivostí pre ľubovoľný smer v danom bode. Minimálnou hodnotou budeme značiť  $\kappa_1$  a maximálnou  $\kappa_2$ . Následne **Gaussovou krivosťou(GK)** rozumieme súčin hlavných krivostí v bode  $X$ . Pre hlavné krivosti platí nasledujúca veta.

**Veta(3)** Hlavné krivosti  $\kappa_1, \kappa_2$  sa dajú spočítať ako korene kvadratickej rovnice

$$\begin{vmatrix} \kappa g_{11} - h_{11} & \kappa g_{12} - h_{12} \\ \kappa g_{12} - h_{12} & \kappa g_{22} - h_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Platí že *Gaussova krivosť* sa dá počítať ako  $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}$

**Definícia(21)** Na ploche poznáme 3 typy bodov

- (i) *eliptický* pre :  $K > 0$
- (ii) *hyperbolický* pre :  $K < 0$
- (iii) *parabolický* pre :  $K = 0$

**Veta(4)** (*Theorema Egregium*) je veľmi význačná a prekvapujúca veta ktorá tvrdí že Gaussova krivosť  $K$  patrí do vnútornej geometrie plochy t.j. je vyjadriteľná pomocou koeficientov 1ZF a ich prvých a druhých parciálnych derivácií.

$$K = f(g_{ij}, \frac{\partial g_{ij}}{\partial u}, \frac{\partial g_{ij}}{\partial v}, \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial v^2})$$

Je to prekvapujúce zistenie, keďže hlavné krivosti sú závislé aj na 2ZF. No platí že ich násobok už závislý nieje. Dôkaz v [4] str.88.

## 2.2.4. Zobrazenie z plochy na plochu

V tejto časti uvediem izometrické zobrazenie medzi plochami a pojem vnútornej geometrie plôch.



**Definícia(22)** Majme dve plochy  $\mathcal{S}_1$  a  $\mathcal{S}_2$  a bijektívne zobrazenie  $g : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ . Zobrazenie  $g$  nazveme *izometria* ak zachováva dĺžky kriviek na plochách.

*Pozn.* Dá sa ukázať že je to práve vtedy, keď je v odpovedajúcich si bodoch rovnaká Prvá základná forma t.j.  $\varphi_1^1 = \varphi_1^2$

**Definícia(23)** *Vnútrotnou geometriou plochy* rozumieme vlastnosti plochy ktoré sa zachovávajú pri izometrii.

Sú to vlastnosti ktoré sú vyjadriteľné pomocou koeficientov 1ZF a ich derivácií do rádu 2.

### 2.2.5. Geodetiky

Geodetikám sa budem podrobnejšie venovať v druhej kapitole pri Clairotových plochách no rád by som na začiatku uviedol ich definície a základné vlastnosti. Najčastejšie a najnázornejšie je geodetika definovaná, ako najkratšia krivka na ploche spájajúca dva dané body. Alternatívna definícia vedie cez geodetickú krivosť krivky na ploche. Obe definície sú samozrejme ekvivalentné aj keď iba lokálne, no dokázať ich ekvivalenciu je pomerne zložité.

V poslednej časti sme definovali veľkosť kolmého priemetu vektoru krivosti  $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$  do smeru normály ako normálovú krivosť  $\kappa_n^a$ . Priemet vektoru krivosti do dotyčicovej roviny  $\tau_{\mathbf{X}}\mathbf{S}$  nazývame *vektor geodetickej krivosti*  $\gamma''_\tau$ . Veľkosťou tohto vektoru rozumieme *geodetickú krivosť* krivky  $\mathcal{C}$  v bode  $\mathbf{X}$ . Platí:

$$\kappa_g = \frac{d^2\gamma}{ds^2} \left( n \times \frac{d\gamma}{ds} \right), \quad |\kappa_g| = \|\gamma''_\tau\|$$

**Definícia(24)** Krivku na ploche nazývame **geodetikou**, ak platí že v každom jej bode je geodetická krivosť rovná nule.

*Pozn.* Platí že krivka  $\mathcal{C}$  na ploche  $\mathcal{S}$  je geodetikou, práve vtedy, keď jej hlavná normála  $\frac{d\gamma}{ds^2}$  leží na tej istej úsečke ako normálový vektor plochy. Táto podmienka spôsobí, že priemet hlavnej normály je nulový vektor, z čoho vyplýva nulová hodnota geodetickej krivosti.

Oobecne je veľmi náročné dané geodetiky hľadať, pre ľubovoľnú plochu, no ako si ukážeme v časti Clairotových plôch, pre istú skupinu je riešenie podstatne jednoduchšie. Pre rovinu platí že geodetikami sú priamky. To je samozrejmé, pretože najkratšia spojnice dvoch bodov je priamka a ak na ploche existuje priamka spájajúca dva body, ktorá leží na ploche, tak je to geodetika.

[2]

## 3. Špeciálne plochy

Jedná sa o hlavnú časť mojej práce. Uvediem niektoré kategórie špeciálnych plôch, ich popis a najdôležitejšie charakteristiky. Veľký dôraz kladniem na obrázky ktoré sú vytvorené pomocou programu MATLAB. Zameriam sa hlavne na Clairotove plochy u ktorých sa budem venovať hľadaniu geodetík, ale načrtnem aj problematiku plôch minimálnych, rotačných a plôch s predpísanou gausovou krivosťou.

### 3.1. Rotačné plochy

Rotačné plochy majú veľké využitie v praxi, sú pomerne jednoduché, ľahko sa dá spočítať ich povrch a obsah atd. Napríklad tvar rotačného paraboloidu sa používa pri konštrukcii satelitov a prímáčov. Často sa využívajú v dizajne, množstvo predmetov z praxe je rotačných, z dôvodu výroby, využitia alebo iných dôvodov.

Rotačné plochy vznikajú rotáciou ľubovoľnej krivky okolo osi rotácie. Uvažujeme že tvoriaca krivka neleží v rovine kolmej k ose.

Obečný tvar rotačnej plochy je:

$$f(u, v) = f(\varphi(v)\cos(u), \varphi(v)\sin(u), \psi(v)) \quad (3.1)$$

kde  $\varphi(v)$  a  $\psi(v)$  sú ľubovoľné funkcie. Všimneme si, že po dosadení za  $\varphi(v) = r\cos(v)$  a  $\psi(v) = r\sin(v)$  dostaneme vyjadrenie sféry o polomere  $r$ , z čoho vyplýva že sféra je príkladom rotačnej plochy.

*Poznámka:* Odvodím výpočet obsahu rotačnej plochy podľa 2.6.

Pre prípad rotačných plôch uvažujeme oblasť  $D$  ako množinu  $\langle 0, 2\pi \rangle \times \langle a, b \rangle$  kde  $u \in \langle a, b \rangle$  a  $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Po výpočte koeficientov  $g_{11} \dots g_{22}$  pre všeobecné parametrické vyjadrenie rotačnej plochy a dosadení medzí vyjde integrál:

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b \varphi(v) \sqrt{\varphi'^2(v) + \psi'^2(v)} dv du \quad (3.2)$$

Po integrácií cez  $u$  vyjde výsledný vzorec pre parametrické zadanie ako:

$$A = 2\pi \int_a^b \varphi(v) \sqrt{\varphi'^2(v) + \psi'^2(v)} dv \quad (3.3)$$

Pre úplnosť uvediem aj vzorec pre plošný obsah rotačnej plochy vytvorenej rotáciou krivky explicitne zadanej rovnicou  $f = y(x)$  okolo osy  $x$ .

$$A = \int_a^b 2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (3.4)$$

### 3.1.1. Dôležité čiary:

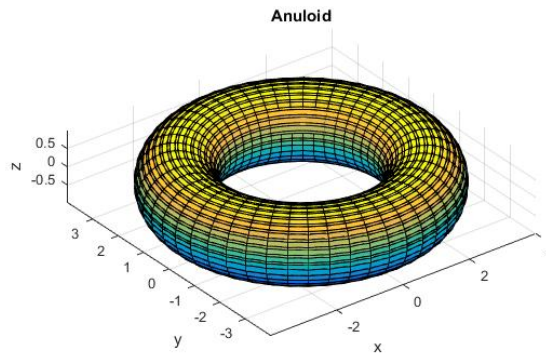
**Súradnicové krivky** sú krivky zadané v oblasti parametrov  $D$  rovnicami  $u = konst.$  alebo  $v = konst.$  Pre rotačné plochy sa krivky určené  $u = konst$  nazývajú *poludníky* a na nich kolmé krivky určené pomocou  $v = konst.$  tzv. *rovnobežkové kružnice*, ktoré spolu tvoria *súradnicovú sieť*. Jednotlivé súradnicové krivky sa pretínajú vždy pod pravým úhlom. *Dôkaz:* Koeficienty 1ZF pre rotačnú plochu zadanú parametricky, viď. 3.1 sú:  $g_{11} = \varphi^2(v)$ ,  $g_{12} = 0$ ,  $g_{22} = \varphi'^2(v) + \psi'^2(v)$ . Platí že pre ľubovlnú súradnicovú krivku zadanú  $u = konst, v = t$  je dotyčnicový vektor rovný  $\vec{a} = (0, 1)$  a pre krivku  $v = konst, u = t$  je jej dotyčnicový vektor  $\vec{b} = (1, 0)$ . Po dosadení do 2.8 je kosínus uhlu rovný  $\cos(\theta) = \frac{0}{\sqrt{\varphi'^2(v) + \psi'^2(v)}\sqrt{\varphi^2(v)}} = 0$  Z toho vyplýva že úhol ľubovolnej dvojice poludníku a rovnobežkovj kružnice na rotačnej ploche je pravý ( $\theta = 90^\circ$ ).

### 3.1.2. Najdôležitejšie rotačné plochy:

Samozrejme asi najdôležitejšie rotačné plochy sú guľa, kužel a valec, no jedná sa o veľmi známe a jednoduché plochy a preto ich nebudem uvádzať.

1. **Anuloid:** Jedná sa o jeden z prípadov rotácie kružnice o polomere  $r$  okolo osy ležiacej v rovine kružnice, vzdialenej od stredu kružnice o  $R > r$ . Podľa pomeru dvoch polomerov môžeme dostať buď anuloid alebo pretínajúci sa anuloid a pre  $R = 0$  guľu. Parametrizácia anuloidu:

$$\begin{aligned}x(u, v) &= (R + r \cos(u)) \cos(v) \\y(u, v) &= (R + r \cos(u)) \sin(v) \\z(v) &= r \sin(u)\end{aligned}$$



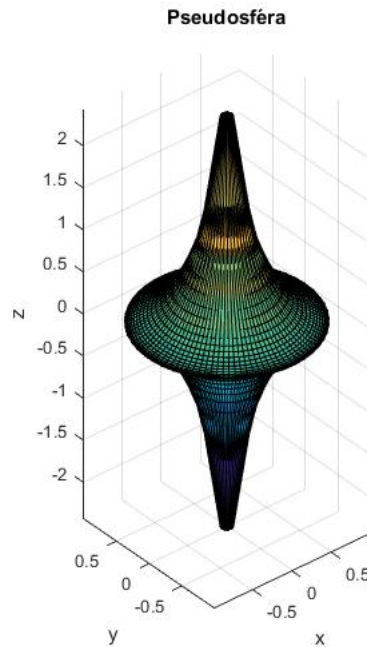
Obrázek 3.1: Anuloid

2. **Pseudosféra:** Vznikne rotáciou krivky zvanej *traktrix*, čo je krivka zadaná ako  $y = f\left(a \cdot \operatorname{arcsech}\left(\frac{x}{a}\right)\right)$  kde  $a \in (0, \infty)$ . Veľkosť  $a$  určuje vzdialenosť na ose  $x$  pre  $y = 0$ . Pre krivku platí vlastnosť, že vzdialenosť od bodu  $P$  ležiacom na krivke k priesečníku dotýčnice ku krivke v bode  $P$  a osy rotácie, je konštantná. Zaujímavá vlastnosť pseudosféry je jej záporná hodnota gausovej krivosti  $K = -\frac{1}{r^2}$  ktorá je rovná zápornej hodnote gausovej krivosti sféry. Odtiaľ názov *pseudosféra*. Jej parametrické vyjadrenie môže vyzeráť nasledovne:

$$x(u, v) = r \operatorname{sech}(v) \cos(u)$$

$$y(u, v) = r \operatorname{sech}(v) \sin(u)$$

$$z(v) = v - \tanh(v)$$



Obrázek 3.2: Pseudosféra

3. **Katenoid:** Ďalšou zaujímavou rotačnou plochou je *katenuoid*, no ten je zároveň aj plochou minimálnou, takže ho budeme spomínať v ďalšej časti a preto jeho opis vynecháme.

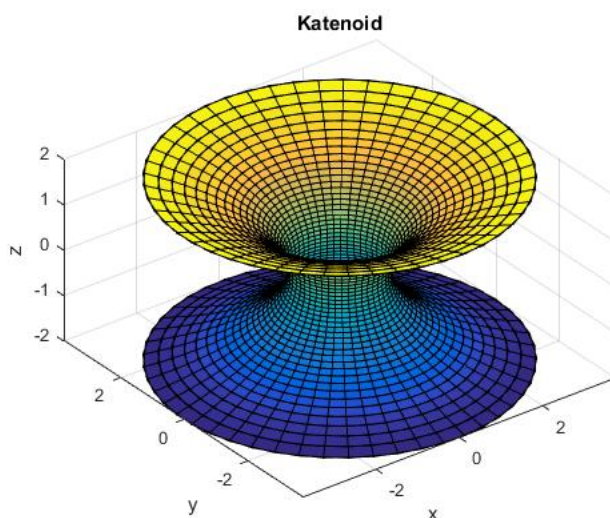
## 3.2. Minimálne plochy

Problematika minimálnych plôch je veľmi rozsiahla a preto minimálne plochy spomeniem len okrajovo. Zameriam sa na ukázanie najznámejších príkladov a objasnenie ich vlastností. Jedná sa o plochy ktoré majú v každom bode hodnotu strednej krivosti  $H$  nulovú. Geometricky táto podmienka znamená, že minimálna plocha je zároveň plocha s najmenším možným obsahom ktorá obsahuje danú hranicu. Jedná sa o veľmi zaujímavé zistenie, ktoré má mnoho využití. Je dokázané že plocha obsahujúca danú hranicu s najmenším možným obsahom spĺňa podmienku  $H = 0$ . Z podmienky vyplýva že hlavné krivosti sú v každom bode opačné tj.  $\kappa_1 = -\kappa_2$ . Ďalšia vlastnosť je, že každý bod minimálnej plochy je buď planárny alebo hyperbolický. Často sa minimálne plochy označujú termínom "soap film", z dôvodu že mydlová bublina natiahnutá na tenkom drôte ktorý predstavuje hranicu  $\partial S$  zaujme z hľadiska minimálnej energie polohu práve minimálnej plochy, pre danú hranicu  $\partial S$ .

Významná trieda minimálnych plôch sú *rotačné minimálne plochy*. Pre ne platí zaujímavá skutočnosť:

**Definícia(25)** *Každá rotačná minimálna plocha je otvorenou podmnožinou katenoidu. Dôkaz v [1].*

**Katenoid** je rotačná plocha ktorá vznikne rotáciou *reťazovky* čo je krivka daná funkčným predpisom  $y(x) = a \cdot \cosh(\frac{x}{a})$ . Jedná sa o krivku ktorá v určitom zmysle minimalizuje svoju energiu. Reťaz voľne zavesená na svojich dvoch koncoch v gravitačnom poli opisuje práve túto krivku. Ponúka sa názorný príklad pomocou mydlovej bubliny medzi dvomi rovnobežnými kružnicami, ktorá zaujme tvar katenoidu.



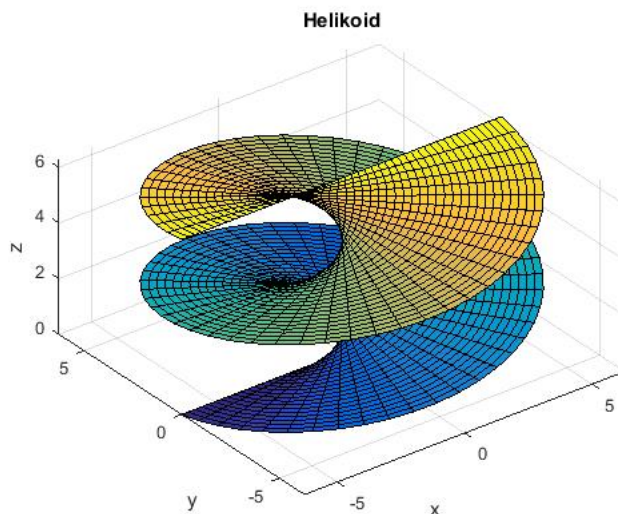
Obrázek 3.3: Katenoid

Všeobecne je veľmi ťažké nájsť analyticky minimálnu plochu, je to možné len vo vybraných prípadoch ako sú napríklad rotačná plocha alebo piamková plocha, pre ktoré platí:

**Veta(4)** Každá priamková minimálna plocha je otvorenou podmnožinou helikoidu alebo roviny.

Dôkaz v [1].

**Helikoid** vznikne simultánnou rotáciou priamky okolo osy kolmej na priamku a posunom po tejto ose. Zmenou parametru  $a$  v parametrickom zadaní sa mení rýchlosť posúvania tvoriacej krivky po ose rotácie. Jeho hodnoty 1ZF sú:  $E = 1, F = 0, G = u^2 + 1$



Obrázek 3.4: Helikoid

Uvediem parametrické vyjadrenia helikoidu a katenoidu:

#### Helikoid

$$x = v \cos(u)$$

$$y = v \sin(u)$$

$$z = au$$

$$E = 1, F = 0, G = u^2 + 1$$

#### Katenoid

$$x = a \cosh \frac{v}{a} \cos(u)$$

$$y = a \cosh \frac{v}{a} \sin(u) \quad (3.5)$$

$$z = v$$

$$E = \sinh^2(u) + 1, F = 0, G = \cosh^2(u)$$

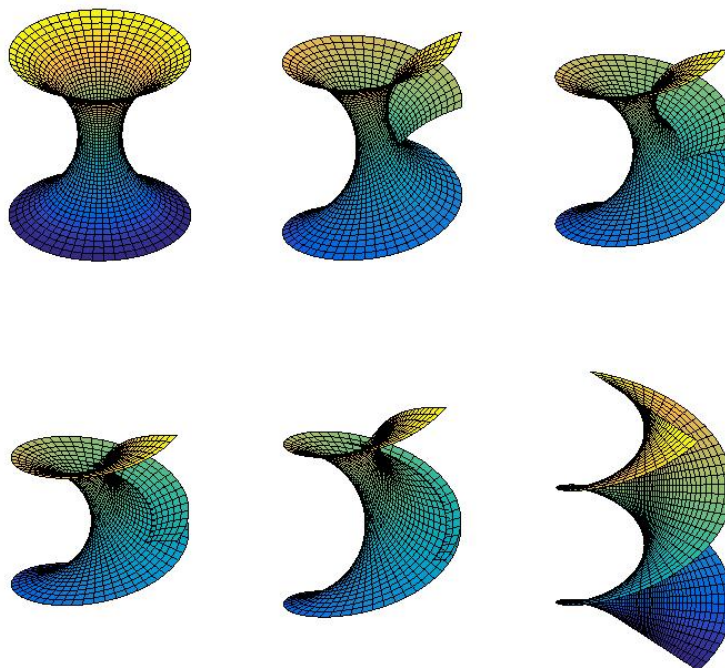
Je jednoduché dokázať že medzi helikoidom a katenoidom existuje *izometrická deformácia*. T.j. dá sa zkonštruovať jednoparametrická trieda plôch s jedným parametrom  $\alpha$  ktorý pre hodnotu  $\alpha = 0$  dáva parametrizáciu katenoidu a pre  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  helikoid. Táto trieda má zároveň vlastnosť že všetky plochy patriace do nej sú navzájom lokálne izometrické. Načrtnem iba ideu dôkazu.

*Idea dôkazu:* Uvažujme nasledujúce parametrizácie katenoidu  $k(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$  a helikoidu  $h(u, v) = (-\sinh v \sin u, \sinh v \cos u, u)$ . Skutočne sa jedná o parametrizáciu helikoidu, pretože po nadradení  $v \rightarrow \sinh v$  a  $u \rightarrow u + \frac{\pi}{2}$  v pôvodnej parametrizácii 3.5 dostaneme požadovanú parametrizáciu. Prvé zobrazenie je konformné, teda zachováva smer a druhé je izometrické, takže reparametrizácia je konformná.

Plochu tried s parametrom  $\alpha$  zavedieme nasledovne

$$\mathbf{p}(\alpha, u, v) = \cos(\alpha)k(u, v) + \sin(\alpha)h(u, v)$$

Pri prechode  $\alpha = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$  prejde parametrické vyjadrenie z katenoidu na helikoid. Na Obrázku 3.5 je vidieť postupnú deformáciu. Celý dôkaz možno nájsť v [1] str. 30,31.



Obrázek 3.5: Deformácia katenoidu na helikoid

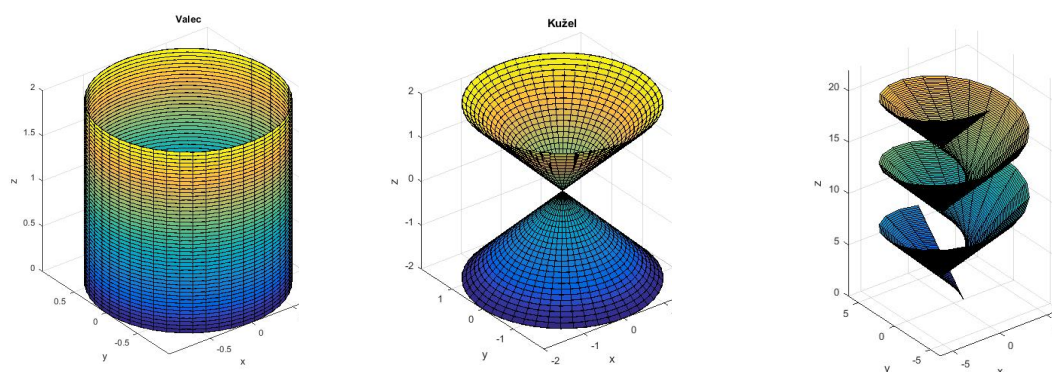
[1]



### 3.3. Plochy s predpísanou Gaussovou krivosťou

#### 3.3.1. Plochy s nulovou GK

Pre istú skupinu plôch platí, že majú nulovú Gaussovú krivosť. Jedná sa o tzv. *rozvinuteľné priamkové plochy*. Sú to plochy, ktoré sú súčasťou jednoparametrickej sústavy priamok a pre ktoré platí, že pozdĺž každej tvoriacej priamky je dotyčnicová rovina totožná. Alebo ak vychádzame z *Vety(4)- Theorema Egregium* a faktu že pri izometrii je zachovaná vnútorná geometria, tak navzájom izometrické plochy majú rovnakú Gaussovú krivosť. A teda každá plocha izometrická s rovinou, inými slovami *rozvinuteľná plocha*, má nulovú Gaussovú krivosť. Jedná sa teda prakticky o valce, kužele a plochy dotyčníc a ich kombinácie. Uvediem iba pár obrázkov pre ilustráciu.



Obrázek 3.6: Valec, kužele a plocha dotyčníc šróbovice

#### 3.3.2. Plochy s konštantnou GK

Často sú označované ako tzv. CGC plochy (Constant Gaussian Curvature) a jedná sa o pomerne mladú a rozvíjajúcu sa kategóriu plôch. Medzi najdôležitejšie príklady patria hlavne rotačné plochy pre ktoré platí mnoho zaujímavých viet. Rotačné CGC plochy sú napríklad spomenutá guľa, valec a pseudosféra. Pokúsim sa uviesť čo najviac názorných príkladov a v skratke uviesť základné vlastnosti a vzťahy. Nazačiatok uvediem ešte pár potrebných definícií.

**Definícia(26)** Plocha  $\mathcal{S}$  je **úplná**, ak pre každý bod  $p \in \mathcal{S}$ , ľubovoľná parametrizovaná geodetika  $\gamma : \langle 0, x \rangle \rightarrow \mathcal{S}$  vychádzajúca z bodu  $p = \gamma(0)$  je rozšíriteľná na parametrizovanú geodetiku  $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$ .

**Definícia(27)** Plochu  $\mathcal{S}$  nazývame **uzatvorenou**, ak je každý jej bod vnútorný, t.j. pre každý bod  $x \in \mathcal{S}$   $\exists \delta > 0$  : okolie  $\mathcal{O}_\delta(x) \in \mathcal{S}$ .

**Veta(5)** Majme uzatvorenú, úplnú, regulárnu plochu  $\mathcal{S}$  s konštantnou Gaussovou krivosťou  $K = \frac{1}{a^2}$ . Jedná sa o sféru s polomerom  $a$ .

Dôkaz vety je opäť pomerne zložitý a radšej ho vypustím. Radšej načrtnem geometrickú ideu, podľa ktorej sa dá veta jednoducho pochopiť. Dôležitá je predstava izometrie,



### 3.3. PLOCHY S PREDPÍSANOU GAUSSOVOU KRIVOSŤOU

ktorá zachováva Gaussovu krivosť, dĺžky aj uhly kriviek. Dá sa jednoducho predstaviť ako ohýbanie plochy bez ťaženia. Uvedomme si že veta pojednáva výlučne o úplných plochách. Pre neúplné plochy ako napríklad polosféru existuje nekonečne mnoho rôznych izometrií. Dajú sa predstaviť ako stláčanie a deformácie polovice loptičky, bez ťaženia materiálu. No ak sa jedná o celú sféru, ohýbanie neprichádza v úvahu. Vyjadruje to nasledujúca veta.

**Veta(6)** Označme ako  $\varphi : \Sigma \rightarrow S$  izometriu sféry  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  na regulárnu plochu  $S = \varphi(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$ .  $S$  je sféra.

**Rotačné plochy s konštantnou kladnou GK** Ako som už spomenul guľa je jediná úplná, regulárna, uzatvorená plocha s kladnou, konštantnou GK. No okrem nej existujú ešte ďalšie rotačné plochy s danou krivosťou. Pre ich popis budeme hľadať ich tvoriace krivky ktoré plochy úplne určia. Označíme ich ako  $\alpha(v) = (\varphi(v), \psi(v))$  Pre rotačné plochy s vyjadrením 3.1 platí že  $K = \frac{-\varphi''}{\varphi}$ . Následne

$$\varphi'' + \frac{\varphi}{a^2} = 0$$

Riešenie je obecné tvaru:

$$\varphi(v) = b \cos(v/a + c)$$

Konštantu  $c$  môžeme obecné uvažovať rovnú nule pretože vyjadruje iba posunutie tvoriacej krivky pozdĺž ose rotácie, čo nemá výsledný vplyv na plochu. Teda  $c = 0$ . Bez straty na obecnosti uvažujme parametrizáciu oblúkom pre  $\alpha$ . Potom  $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$ . Ak predpokladáme že  $\psi' \geq 0$  tak

$$\psi'(v) = \sqrt{1 - (b^2/a^2)(\sin(v/a))^2}. \quad (3.6)$$

Ak by bolo  $\psi' \leq 0$  tak vezmeme namiesto  $v$  hodnotu  $-v$  nedopustíme sa straty na obecnosti, keďže symetrické tvoriace krivky vytvoria rovnakú rotačnú plochu. Po integrácii 3.6 dostaneme vyjadrenie

$$\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \left( \sin\left(\frac{t}{a}\right) \right)^2} dt \quad (3.7)$$

No je potrebné dať pozor na hranice  $v$  aby bol výraz pod odmocninou kladný. Preto dostávame riešenie úlohy v nasledujúcom tvare. Rotačná plocha s konštantnou Gaussovou krivosťou  $K = 1/a^2$  je časťou plochy parametrizovanej ako:

$$f(u, v) = f(\varphi(v)\cos(u), \varphi(v)\sin(u), \psi(v))$$

kde

$$\begin{cases} \varphi(v) = b \cos\left(\frac{v}{a}\right) \\ \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \left( \sin\left(\frac{t}{a}\right) \right)^2} dt \end{cases} \quad (3.8)$$

### 3.3. PLOCHY S PREDPÍSANOU GAUSSOVOU KRIVOSTŤOU

Pre dané  $b > 0$  má parameter  $v$  nasledujúce hodnoty:

$$\text{pre } b = a : \quad -\frac{\pi}{2a} \leq v \leq \frac{\pi}{2a}$$

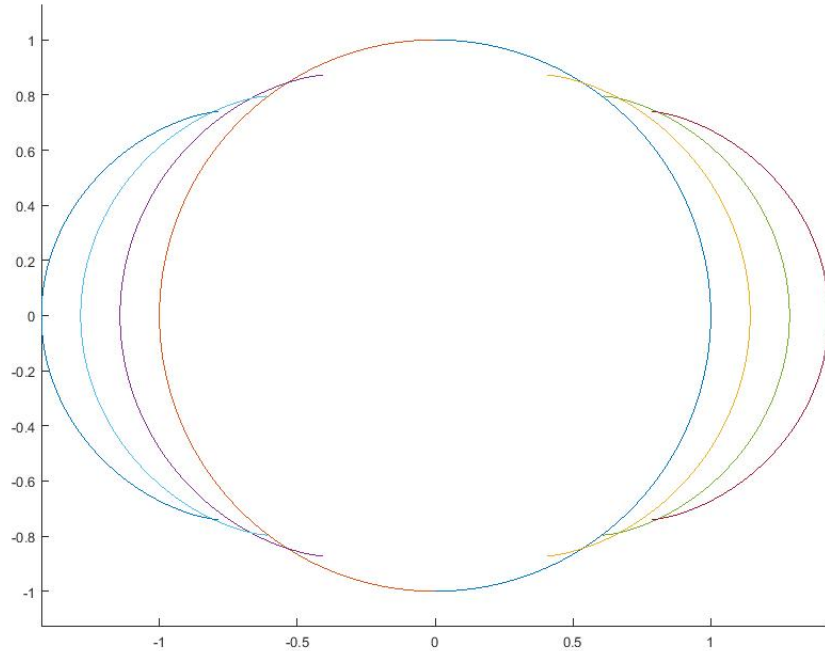
$$\text{pre } b < a : \quad -\infty \leq v \leq +\infty$$

$$\text{pre } b > a : \quad -a \arcsin\left(\frac{a}{b}\right) \leq v \leq a \arcsin\left(\frac{a}{b}\right)$$

Singulárne body existujú pre  $\varphi(v) = 0 \Leftrightarrow v = (n + 1/2)\pi a$ .

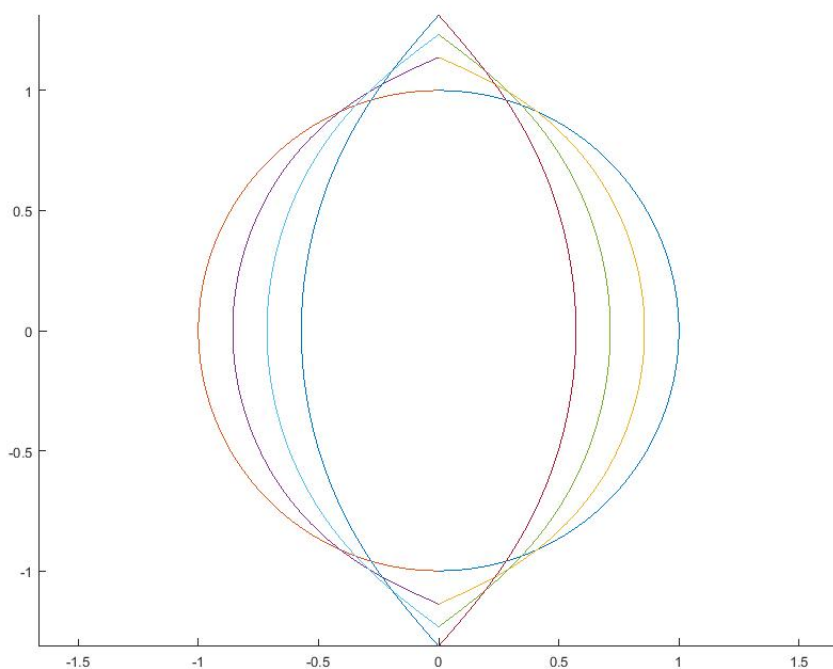
Všimnime si že pre  $b = a$  je  $\varphi(v) = a \cos(v/a)$  a  $\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \sin(t/a)^2} dt = a[\sin(t/a)]_0^v = a \sin(v/a)$

Teda jedná sa o sféru s polomerom  $a$  a parameter  $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$  zaručuje že sa tvoriaca kružnica neprekrýva. V programe MATLAB som zobrazil niekoľko prípadov. Na obrázku 3.7 je vidieť tvoriace krivky pre  $b \geq a = 1$  a na obrázku 3.8 zase prípad pre  $b \leq a$ .

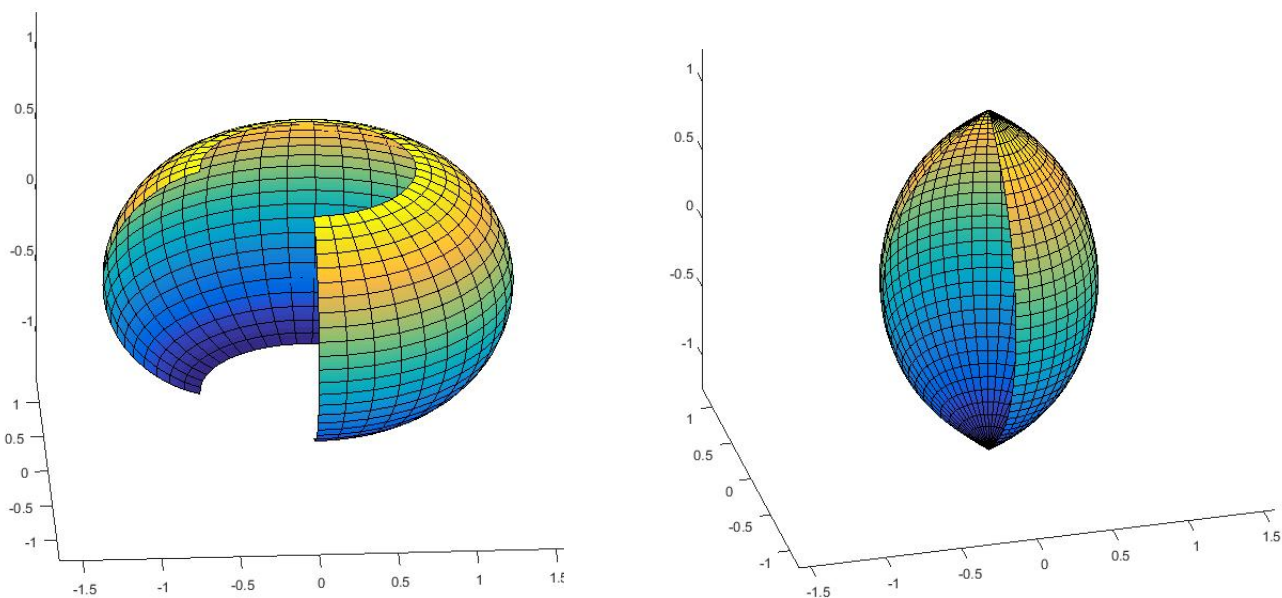


Obrázek 3.7: Tvoriace krivky pre  $b \geq a$

### 3.3. PLOCHY S PREDPÍSANOU GAUSSOVOU KRIVOSŤOU



Obrázek 3.8: Tvoríace krivky pre  $b \leq a$



Obrázek 3.9: Rotačné plochy s kladnou konštantnou Gaussovou krivosťou

**Rotačné plochy so zápornou konštantnou GK** Dá sa povedať že pre negatívnu krivosť sú výsledky značne odlišné a komplikovanejšie. Platí tzv. Hilbertova veta:

**Veta(7)** *Úplná, uzatvorená, regulárna plocha s negatívnou GK neexistuje.*

Dôkaz je napríklad v [3]

### 3.3. PLOCHY S PREDPÍSANOU GAUSSOVOU KRIVOSTŤOU

Ak sa pokúsime analogicky ako pre plochy s kladnou GK, zistiť tvoriace priamky rotačných plôch so zápornou GK, dostaneme viac prípadov. Znovu predpokladáme vyjadrenie plochy 3.1 a  $K = -1/a^2$  Riešime rovnicu

$$\varphi''^2 - \frac{\varphi}{a^2} = 0$$

Všeobecné riešenie:

$$\varphi(v) = Ae^{v/a} + Be^{-v/a}$$

Podľa volby A a B dostaneme tri rôzne situácie. Postup vynechám a spomeniem iba o aké typy sa jedná a ich vyjadrenie.

i) **Pseudosféra.** Pri volbe  $A = 0$  alebo  $B = 0$ .

$$\gamma(v) = \left( ae^{-v/a}, \int_0^v \sqrt{1 - e^{-2t/a}} dt \right) \quad \text{pre } 0 \leq v \leq \infty$$

Ak zvolíme namiesto  $v \rightarrow -v$  dostaneme druhú polovicu prseudosféry symetrickú podľa osy  $x$ .

ii) **Hyperbolický typ.** Pre  $A = B$

$$\begin{cases} \varphi(v) = b \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \\ \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \left( \sinh\left(\frac{t}{a}\right) \right)^2} dt \end{cases} \quad (3.9)$$

iii) **Kuželový typ.** Pre  $A = -B$

$$\begin{cases} \varphi(v) = b \sinh\left(\frac{v}{a}\right) \\ \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \left( \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \right)^2} dt \end{cases} \quad (3.10)$$

Dôkaz je napríklad v [3] Môžeme si všimnúť veľkú podobnosť medzi vyjadrením 3.8 a 3.9 resp. 3.10. Namiesto goniometrických funkcií ( $\cos, \sin$ ) sú hyperbolické funkcie ( $\cosh, \sinh$ ).

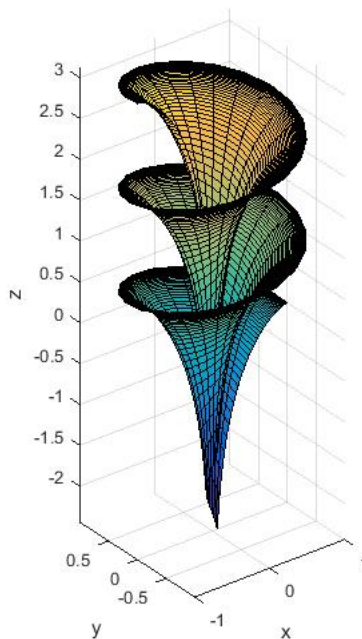
Príkladom nerotačnej plochy s konštanou zápornou GK je Diniho plocha na Obrázku 3.10.

**Diniho plocha** vznikne šróbovaním polovice pseudosféry. Parametrické vyjadrenie je nasledovné:

$$f(u, v) = (r \cos(u) \sin(v), r \sin(u) \sin(v), su + a(\cos(v) + \log(\tan(\frac{v}{2})))$$

Krivosť plochy je konštantná, rovná  $K = -\frac{1}{r^2 s^2}$

### 3.3. PLOCHY S PREDPÍSANOU GAUSSOVOU KRIVOSTŤOU



Obrázek 3.10: Diniho plocha

Pre  $r = 1$  a  $s = \frac{1}{5}$  sú koeficienty 1ZF:

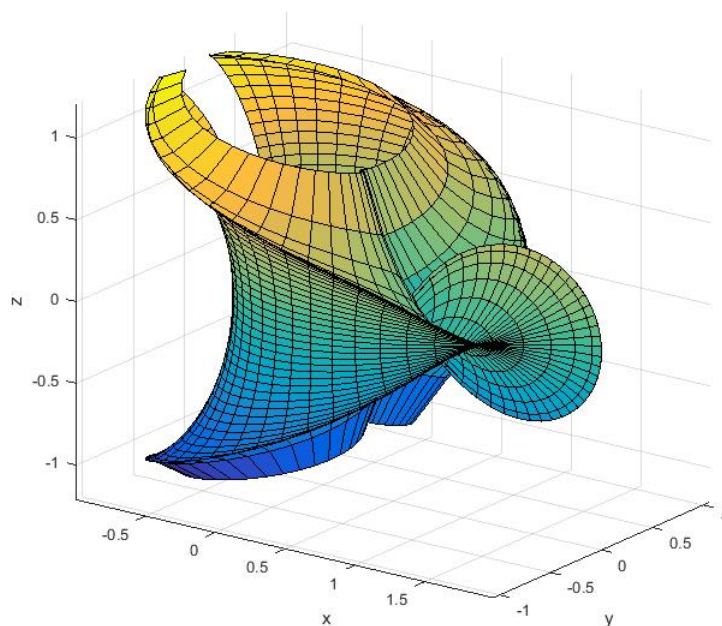
$$E = \sin(v)^2 + 1/25, F = \frac{\tan(v/2)^2/2 + 1/2}{5 \tan(v/2)} - \frac{\sin(v)}{5}, G = -\frac{\cos(2v) + 1}{\cos(2v) - 1} \quad (3.11)$$

Samozrejme existuje množstvo plôch ktoré nie sú rotačné a majú konštantnú GK aj keď sa tak na prvý dojem nejaví. Najznámejším príkladom je Kuenova plocha na obrázku 3.11 so značne zložitou parametrizáciou. Jej hodnota GK je  $K = -1$ .

Parametrizácia:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \sin(v) (\cos(u) + u \sin(u))}{(1 + u^2 \sin^2(v))} \\ y &= \frac{2 \sin(v) (\sin(u) - u \cos(u))}{1 + u^2 \sin^2(v)} \\ z &= \ln \left( \tan \left( \frac{1}{2} v \right) \right) + \frac{2 \cos(v)}{1 + u^2 \sin^2(v)} \end{aligned}$$

[3]



Obrázek 3.11: Kuenova plocha

### 3.4. Clairotove plochy

V nasledujúcej časti čo najpresnejšie popíšem Clairotove plochy, spôsob určovania geodetík na týchto plochách a poskytnem aj dostatok obrázkov plôch s geodetikami, vykreslených pomocou MATLABu. Jedná sa o hlavnú časť mojej bakalárskej práce a preto sa ju pokúsim rozobrať čo najhlbšie. Definície diferenciálnych rovníc a pod. samozrejme vynechám, keďže niesú náplňou mojej práce, a budem s nimi pracovať iba čiastočne. Nazačiatok dodefinujem geodetické krivky a vzápätí prejdem výlučne na geodetiky na Clairotovych plochách.

#### 3.4.1. Geodetické krivky (pokračovanie)

Zavedieme preznačenie výrazu parciálnej derivácie funkcie  $f$  podľa  $u, v$  ako  $f_u = f_1, f_v = f_2$  a druhej derivácie  $f_{uu} = f_{11}, f_{uv} = f_{12}$  a  $f_{vv} = f_{22}$  kvôli potrebnému indexovaniu výrazov.

**Veta(8)** Pre každý bod plochy  $\mathcal{S}$  platia nasledujúce rovnice:

$$f_{ij} = \Gamma_{ij}^k f_k + h_{ij} n \quad i, j = \{1, 2\} \quad \text{Sčítanie cez index } k. \quad (3.12)$$

Kde  $f_k, f_{ij}$  značia príslušné prvé a druhé derivácie,  $n$  je normálový vektor,  $h_{ij}$  sú koeficienty 2ZF a  $\Gamma_{ij}^k$  sú takzvané Chrystoffelove symboly, dané rovnicami 3.13.

Rovnice 3.12 nazývame aj ako *Gaussove rovnice plochy*.

**Christofelove symboly:**

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{-FG_v + 2GF_v - GG_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-FE_u + 2EF_u - EE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)},\end{aligned}\quad (3.13)$$

Podľa *definície 24* geodetiky z predchádzajúcej kapitoly je krivka na ploche geodetikov právetedy, ak má nulovú geodetickú krivosť v každom bode. To je ekvivalentné s podmienkov nulového priemetu vektoru krivosti do dotýčnicovej roviny  $\gamma''_\tau$ . Preto ak sa nám podarí vyjadriť tento vektor pomocou charakteristík plochy, dostaneme rovnice, ktorých riešenie predstavuje súbor geodetík na ploche.

**Odvodenie:** Majme parametrizáciu plochy  $\mathcal{S} = f(D)$ ,  $f : D \rightarrow E_3$  a ľubovoľnú krivku na ploche označenú  $\gamma(s) = f(\psi_1(s), \psi_2(s))$  kde  $\psi_1 = u$  a  $\psi_2 = v$ . Odvodíme druhú deriváciu a dosadíme Gaussove rovnice plochy 3.12.

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial \psi_1} \psi'_1 + \frac{\partial f}{\partial \psi_2} \psi'_2 \\ \frac{d^2\gamma}{ds^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \psi_1 \partial \psi_1} \psi_1'^2 + \frac{\partial f}{\partial \psi_1} \psi_1'' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} \psi'_1 \psi'_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \psi_2 \partial \psi_2} \psi_2'^2 + \frac{\partial f}{\partial \psi_2} \psi_2'' = \\ f_{ij} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \frac{\partial \psi_j}{\partial s} \right) + f_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial s^2} &= \Gamma_{ij}^k f_k \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \frac{\partial \psi_j}{\partial s} + \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \frac{\partial \psi_j}{\partial s} h_{ij} n + f_k \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial s^2} = \\ f_k \left( \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \frac{\partial \psi_j}{\partial s} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial s^2} \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \frac{\partial \psi_j}{\partial s} h_{ij} n\end{aligned}\quad (3.14)$$

Dostali sme vyjadrenie vektoru krivosti  $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ . Jeho kolmý priemet do  $\tau_X \mathcal{S}$  je:

$$\gamma''_\tau = f_k \left( \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \frac{\partial \psi_j}{\partial s} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial s^2} \right) \quad (3.15)$$

*Pozn.* Sčíta sa cez  $i, j, k$

Vyplýva z toho že vektor geodetickej krivosti patrí medzi vnútornú geometriu plochy. Ak daný výraz 3.15 položíme rovný nule dostaneme rovnice geodetík. Presnejšie platí veta:

**Veta(9)** Ak krivka parametrizovaná oblúkom  $\gamma(\psi_1, \psi_2)$ , na ploche  $\mathcal{S}$  je riešením sústavy diferenciálnych rovníc:

$$\Gamma_{ij}^k \frac{\partial \psi_i}{\partial s} \frac{\partial \psi_j}{\partial s} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial s^2} = 0$$

tak je to geodetika na ploche  $\mathcal{S}$ . Jedná sa o sústavu dvoch diferenciálnych rovníc druhého stupňa, ktoré sa dajú rozpísať na názornejší tvar:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 \frac{\partial \psi_1}{\partial s} \frac{\partial \psi_1}{\partial s} + 2\Gamma_{12}^1 \frac{\partial \psi_1}{\partial s} \frac{\partial \psi_2}{\partial s} + \Gamma_{22}^1 \frac{\partial \psi_2}{\partial s} \frac{\partial \psi_2}{\partial s} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s^2} &= 0 \\ \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial s} \frac{\partial \psi_1}{\partial s} + 2\Gamma_{12}^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial s} \frac{\partial \psi_2}{\partial s} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial \psi_2}{\partial s} \frac{\partial \psi_2}{\partial s} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial s^2} &= 0\end{aligned}\quad (3.16)$$

*Pozn.* Obecne nájst explicitne riešenie sústavy rovníc 3.16 je veľmi zložité, no pre konkrétne jednoduchšie prípady, môžeme sústavu značne zredukovať a riešenie spočítať explicitne. Výpočty sa zjednodušia na počítanie integrálov.

### 3.4.2. Clairotove plochy

**Definícia(24)** *Plochu nazvme **Clairotova** ak splňuje nasledujúcu podmienku:*

$$E_u = G_u = F = 0 \quad (3.17)$$

Všimnime si, že z podmienky 3.17 vyplýva že koeficienty 1ZF nezávisí na premennej  $u$ . Platí že pre Clairotovote plochy sú iba tri christoffelove symboly nenulové čo zjednoduší počítanie geodetických rovníc.

Jednotlivé christoffelove symboly:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0 & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{E_v}{2E} & \Gamma_{22}^1 &= 0 \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-E_v}{2G}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = 0, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{G_v}{2G} \end{aligned}$$

Ak preznačím  $\psi_1(s) = u(s)$  a  $\psi_2(s) = v(s)$  a použijem konkrétne Christoffelove symboly tak rovnice 3.16 sa zjednodušia na tvar

$$\frac{E_v}{E} u' v' + u'' = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{-E_v}{2G} u'^2 + \frac{G_v}{2G} v'^2 + v'' = 0 \quad (3.19)$$

*Pozn.* Rovina alebo každá plocha, s ňou izometrická, má všetky Christoffelove symboly rovné nule, a teda rovnice vyzerajú jednoducho:

$$u'' = 0 \text{ a } v'' = 0 \quad (3.20)$$

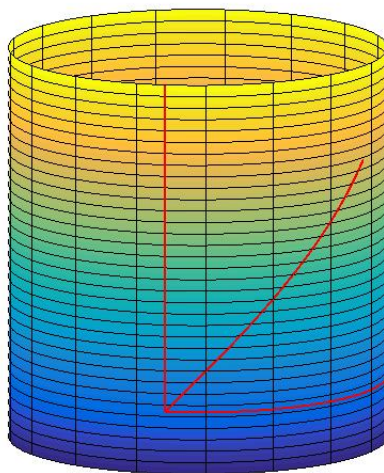
**Príklad.** Na príklade válcu ukážem postup počítania geodetík. Parametrické vyjadrenie válcu s polomerom  $r = 1$  je

$$f(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$$

Valec je izometrický s rovinou takže diferenciálne rovnice sú 3.20. Všeobecné riešenie diferenciálnych rovníc je:  $u = c_1 s + c_2$  a  $v = c_3 s + c_4$ . Ak zvolím počiatočné podmienky, t.j. počiatočný bod a smer (dotyčnicu) dostaneme práve jedno riešenie. Napríklad pre počiatočné podmienky:

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{\pi}{6}, u'(0) = 1 \\ v(0) &= 1, v'(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$





Obrázek 3.12: Geodetiky na valci

dostaneme konštanty  $c_1 = 1, c_2 = \frac{\pi}{6}, c_3 = 0, c_4 = 1$ . Geometricky predstavuje počiatočná podmienka bod  $X = f\left(\frac{\pi}{6}, 1\right) = (\cos(\pi/6), \sin(\pi/6), 1)$  a dotyčnicu v smere  $(1, 0)$ . Riešenie je teda sústava :

$$\begin{aligned} u &= s + \frac{\pi}{6} \\ v &= 1 \end{aligned}$$

Po dosadení do parametrizácie dostaneme kružnicu vo výške 1 s parametrizáciou:

$$f(s) = \left( \cos\left(s + \frac{\pi}{6}\right), \sin\left(s + \frac{\pi}{6}\right), 1 \right)$$

Ak by sme zvolili rovnaký bod a dotyčnicu  $(0, 1)$  pomocou podmienky  $u'(0) = 1, v'(0) = 1$  dostaneme horizontálne priamky. A ak zvolím za dotyčnicu napríklad vektor  $(1, \frac{1}{2})$  podmienkou  $u'(0) = 1, v'(0) = \frac{1}{2}$  dostanem koeficienty  $c_1 = 1, c_2 = \frac{\pi}{6}, c_3 = 1/2, c_4 = 1$ . Riešením je sústava

$$\begin{aligned} u &= s + \frac{\pi}{6} \\ v &= \frac{1}{2}s + 1 \end{aligned}$$

Parametrizácia príslušnej geodetiky je  $f(s) = \left( \cos\left(s + \frac{\pi}{6}\right), \sin\left(s + \frac{\pi}{6}\right), \frac{1}{2}s + 1 \right)$  a jedná sa o šróbovicu. Na obrázku 3.12 sú vykreslené tri spomenuté typy geodetík.

**Veta(10)** *Každá rotačná plocha je zároveň Clairtova.*

*Dôkaz:* Pre rotačnú plochu s parametrickým zápisom 3.1 majú koeficienty 1ZF rovné

$$E = \varphi(v)^2, \quad F = 0, \quad G = \varphi(v)'^2 + \psi(v)'^2 \quad (3.22)$$

A to priamo implikuje vlastnosť 3.17.

**Veta(11) Clairotov vzťah:** *Nech  $\mathcal{S}$  je Clairotova plocha s parametrizáciou  $f(u, v)$  a  $\gamma$  je geodetika na ploche  $\mathcal{S}$ . Označme  $\theta$  ako uhol medzi  $\gamma$  a vektorom  $f_u$ . Potom platí:*

$$\sqrt{E} \cos(\theta) = Eu' = c \quad \text{kde } c = \text{konst.} \quad (3.23)$$

*Dôkaz:* Použitím 3.18  $(Eu')' = E'u' + Eu'' = E_v v'u' + Eu'' = 0$ . Z toho vyplýva že  $Eu' = c$ .

Geodetiku vyjadrím ako  $\gamma = f(u(s), v(s))$ . Podľa 2.2 je uhol vektorov  $\gamma', f_u$

$$\cos(\theta) = \frac{(\gamma' \cdot f_u)}{\|\gamma'\| \|f_u\|} = \frac{(f_u u' + f_v v' \cdot f_u)}{\|\gamma'\| \|f_u\|} = \frac{f_u \cdot f_u u' + f_u \cdot f_v v'}{\|\gamma'\| \|f_u\|}$$

Bez újmy na obecnosti predpokladáme že geodetika je parametrizovaná oblúkom a teda  $\|\gamma'\| = 1$ . Zároveň pre dva kolmé vektory platí že ich skalárny súčin je rovný nule, teda  $f_u \cdot f_v = 0$ . A keďže  $f_u \cdot f_u = \|f_u\|^2$  tak dostaneme

$$\cos(\theta) = \|f_u\| u' = \sqrt{E} u' \quad (3.24)$$

A veta je dokázaná.

**Definícia(25)** Konštantu  $c$  danú pomocou 3.23 nazývame **sklon** geodetiky  $\gamma$  na ploche  $\mathcal{S}$ .

**Veta(12)** *Nech je  $\mathcal{S}$  Clairotova plocha a  $\gamma$  je krivka parametrizovaná oblúkom  $\gamma(t) = f(u(t), v(t))$  ležiaca na ploche. Potom krivka  $\gamma$  je geodetikou vtedy a len vtedy, ak existuje konštanta  $c$  taká že:*

$$\begin{cases} u' = \frac{c}{E} \\ v' = \pm \frac{\sqrt{E - c^2}}{\sqrt{EG}} \end{cases} \quad (3.25)$$

Jedná sa o veľmi dôležité zistenie, ktoré pomáha určiť geodetiky vo smere určenom konštantou  $c$  a preto načrtnem jeho dôkaz.

**Dôkaz:** Z 3.23 priamo vyplýva že  $u' = \frac{c}{E}$ . Keďže je  $\gamma$  parametrizovaná oblúkom, tak platí že:

$$Edu^2 + Fdudv + Gdv^2 = \|\gamma'\|^2 = 1$$

Ak zoberieme v úvahu koeficienty 1ZF Clairotovej plochy tak platí

$$\frac{c^2}{E} + Gv'^2 = 1 \Rightarrow v' = \pm \frac{\sqrt{E - c^2}}{\sqrt{EG}}$$

Takže prvú implikácia je dokázaná a treba dokázať druhú implikáciu, že z 3.25  $\Rightarrow$  3.18 a 3.19, teda že každá krivka splňujúca dané rovnice je geodetika.

$$u'' = \left( \frac{c}{E} \right)' = \frac{cE_v v'}{E^2} = \frac{E_v v' u'}{E}$$

Po úprave dostaneme 3.18 Platí aj že daná krivka je parametrizovaná oblúkom.

$$||\gamma'||^2 = Edu^2 + Gdv^2 = E \left( \frac{c}{E} \right)^2 + \frac{E - c^2}{E} = \frac{c^2}{E} - \frac{c^2}{E} + 1 = 1$$

Nakoniec ak zderivujeme výraz  $= Edu^2 + Gdv^2 = 1$  tak dostaneme:

$$E_v u'' v' + 2E u'' v' + G_v v'^3 + 2G v'' v' = 0$$

$$\vdots$$

$$2G v'' v' = E_v v' u'^2 - G_v v'^3$$

A to je pre  $v' \neq 0$  ekvivalentné s rovnicou 3.19.

Koniec dôkazu

Ak by sme príklad válcu riešili pomocou vety 12 tak dostaneme nasledujúce riešenie. Keďže koeficienty 1ZF sú  $E = 1, F = 0, G = 1$  tak diferenciálne rovnice majú tvar:

$$u' = \frac{c}{1}, \quad v' = \pm \frac{\sqrt{1 - c^2}}{1}$$

Pre sklon  $c = 1$  riešime sústavu  $u' = 1, v' = 0$  teda  $u = s + c_1$  a  $v = c_2$ . Ak použijem predchádzajúce počiatočné podmienky 3.21, dostanem:

$$v = 1, \quad u = s + \frac{\pi}{6}$$

čo je totožné s predchádzajúcim výsledkom.

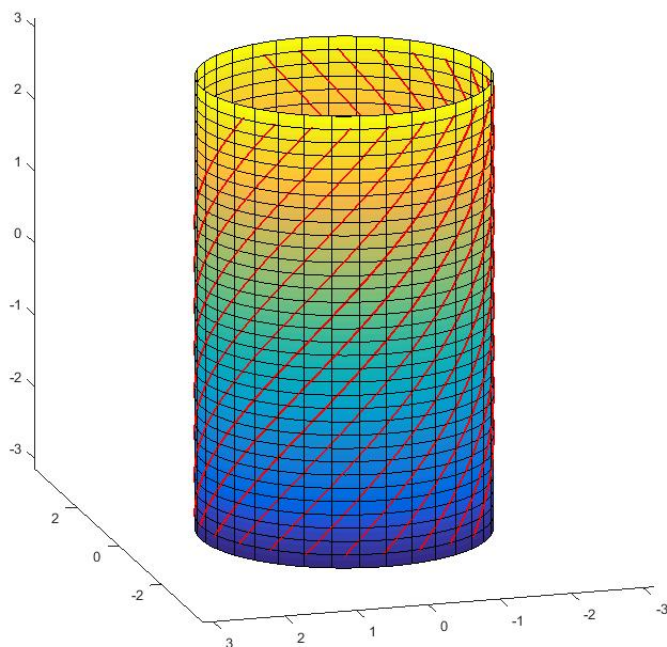
Uvedená *Veta(12)* má veľký význam pretože rovnice 3.25 sú jednoducho riešiteľné. Z tohto dôvodu som sa rozhodol vytvoriť program v softvéri MATLAB ktorý rieši sústavu 3.25 a dáva explicitné riešenie pre rôzne Clairotove plochy s parametrickým zadáním. Podotýkam, že sa jedná o presné explicitné riešenia na ľubovoľnom intervale, čiže som bol schopný s veľkou presnosťou dané geodetiky vykresliť napr. pre guľu, valec alebo kužel.

Preto v poslednej časti uvediem pár obrázkov plôch s ich geodetikami. Postup akým program počíta vysvetlím. Najprv explicitne napočíta koeficienty 1ZF plochy, potom metódou *dsolve* vyrieši sústavu diferenciálnych rovníc s počiatočnou podmienkou určujúcou východzí bod a dosadením vypočítaného  $u(s), v(s)$  do parametrizácie plochy dostaneme danú geodetiku. Pre zvolený ľubovoľný uhol  $\theta$  taký že  $\cos(\theta) = c/\sqrt{E}$  rieši rovnice 3.25 s počiatočnou podmienkou ( $u(0) = a, v(0) = b$ ). Na vykreslenie plochy používam funkciu *fsurf* a na vykreslenie krivky *fplot3*.

### 3.4.3. Geodetiky rotačných plôch

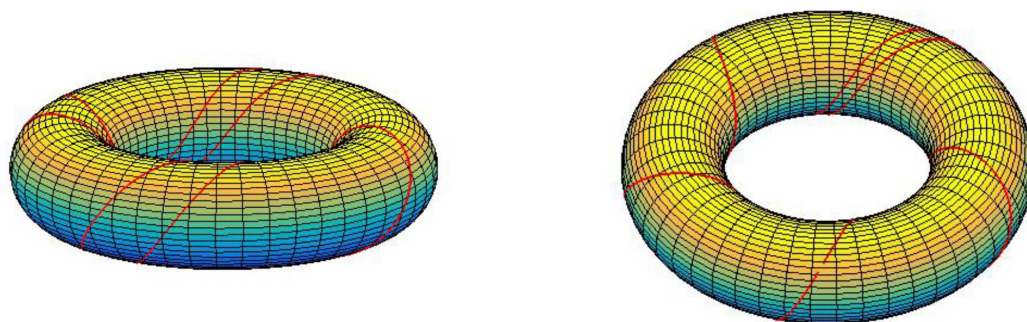
Už som spomenul geodetiky na valci a ešte doplním o geodetiky na guli a kužely.

1. **Valec.** Geodetiky sú hlavné kružnice, priamky a špirály.



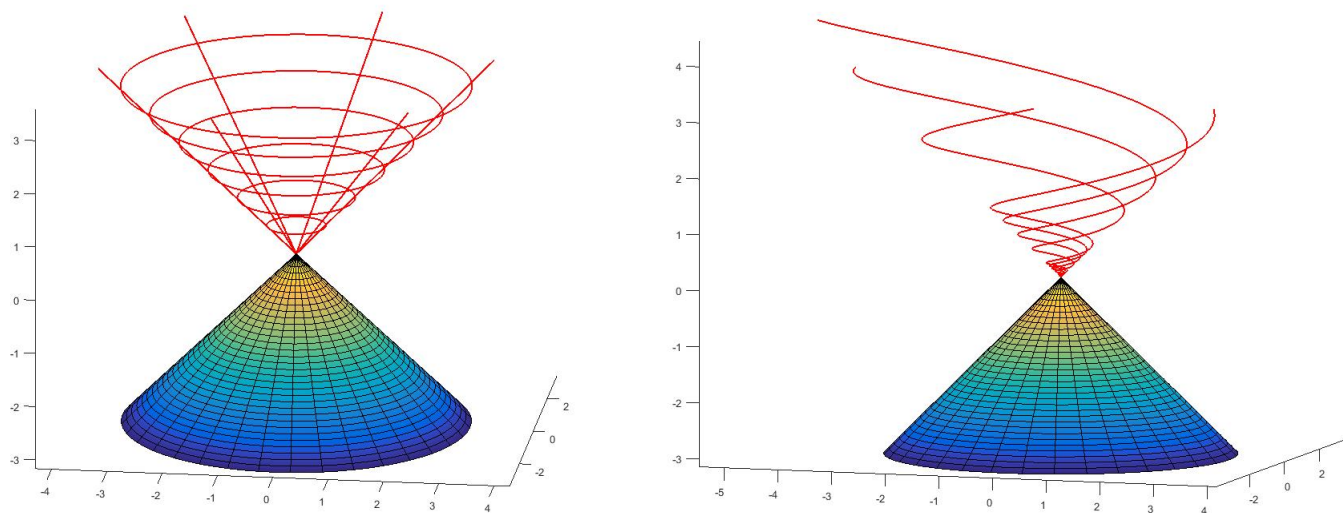
Obrázek 3.13: Geodetiky na valci pre  $c = 0.5$

2. **Anuloid.** Geodetiky pre  $c = 4/5\sqrt{E}$  a  $c = 7/8\sqrt{E}$ .



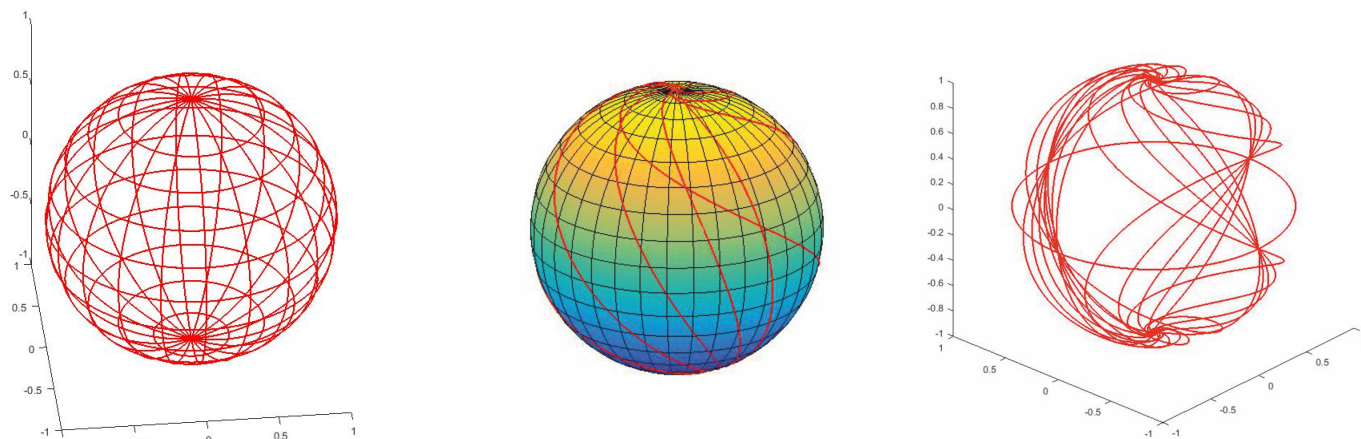
Obrázek 3.14: Geodetiky na anuloide

3. **Kužel.** Geodetiky sú opäť priamky, kružnice rôznych polomerov a rozbiehajúce sa špirály.



Obrázek 3.15: Geodetiky na kuželi

4. **Gulá.** Ako geodetiky vystupujú hlavné kružnice a krivky v tvare špirál.

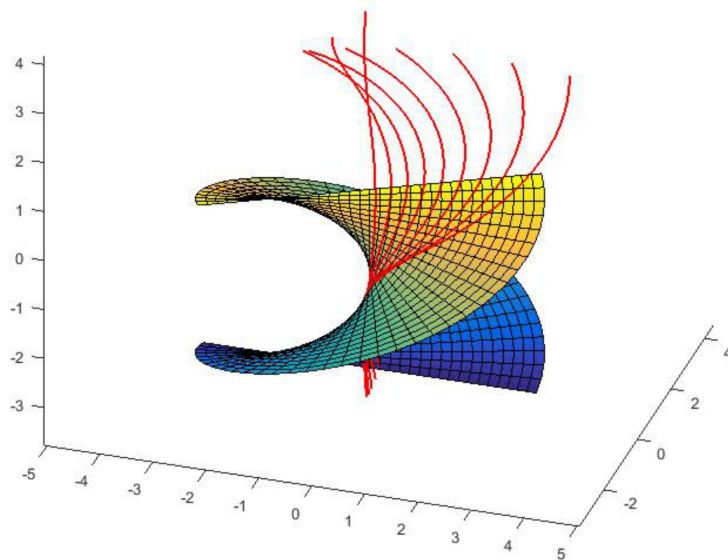


Obrázek 3.16: Geodetiky na guli

### 3.4.4. Geodetiky obecných plôch

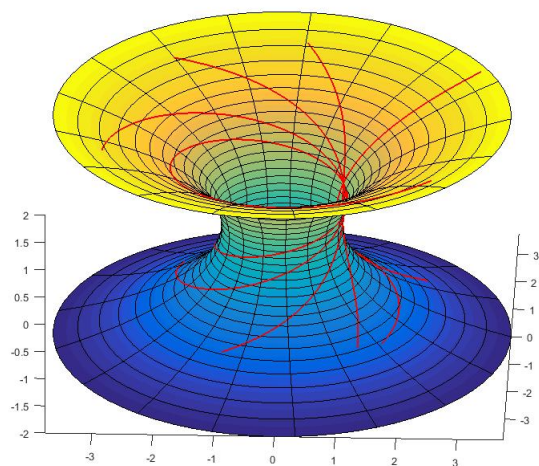
Explicitné riešenia geodetík som bol schopný nájsť pre nasledujúce obecné plochy:

#### 1. Helikoid.



Obrázek 3.17: Geodetiky na helikoide

#### 2. Katenoid.



Obrázek 3.18: Geodetiky na katenoide

## 4. Záver

Práca môže slúžiť ako prehľad rôznych typov plôch a na štúdium základov diferenciálnej geometrie.

V prvej kapitole sme načrtli základné pojmy ako krivka, geodetika, dĺžka krivky, krivosti kriviek a pojmy potrebné na prácu s plochami, ako základné formy plochy, normálová, Gaussova, hlavná krivosť. V hlavnej časti sú rozpracované rotačné plochy, odvodenie obsahu a povrchu rotačnej plochy a základné vlastnosti anuloidu, pseudosféry a katenoidu. Neskôr je spomenutý katenoid a helikoid, dve najdôležitejšie minimálne plochy a ich vzájomná izometrická deformácia. Trochu hlbšie je rozobratá problematika plôch s konštantnou a nulovou Gaussovou krivosťou, kde sú spomenuté i odvodenia hlavných kriviek týchto plôch. V poslednej časti je pri Clairotovych plochách poskytnuté množstvo definícií a vzťahov ohľadom počítania geodetík. Je spomenutý Clairotov vzťah, sklon geodetiky aj príklad výpočtu geodetík pomocou diferenciálnych rovníc. Za jeden z hlavných cieľov som považoval vytvorenie prehľadných obrázkov geodetík, čo sa mi pre množstvo Clairotovych plôch podarilo. Sú to hlavne geodetiky na rotačných plochách ako, valec, guľa, kužel alebo katenoid, no diferenciálne rovnice som vyriešil explicitne aj napr. pre helikoid. Riešenia geodetických rovníc a obrázky sú realizované v prostredí MATLAB.

Ako pokračovanie tejto práce by bolo možné hľadať numerické riešenia pre dané geodetické diferenciálne rovnice a porovnávať numerické riešenia s riešeniami explicitnými. Ak by boli odchyly zanedbateľné, vedeli by sme poskytnúť ešte hlbší náhľad do tematiky geodetík a aproximovať tieto krivky aj na všeobecnejších plochách.

# Literatura

- [1] BERAN, F. Minimální plochy a jejich využití. Bakalárska práca, Univerzita Karlova v Praze, Praha, 2014.
- [2] DOUPOVEC, M. *Diferenciální geometrie a tenzorový počet*. Skriptum VUT Brno, 1999. ISBN 80-214-1470-7.
- [3] GRAY, A. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*. 2.vydání. CRC Press, Inc., 1993. ISBN 0-8493-7872-9.
- [4] KOLÁŘ, I. POSPÍŠILOVÁ, L. *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. 2007. <[https://is.muni.cz/elportal/estud/prif/ps08/geom/web/dl/dgpdf\\_bez.pdf](https://is.muni.cz/elportal/estud/prif/ps08/geom/web/dl/dgpdf_bez.pdf)>.



## 5. Zoznam použitých skratiek a symbolov

$K$	Gaussova krivosť
1ZF	Prvá základná forma
2ZF	Druhá základná forma
$\Gamma_{ij}^k$	Chrystoffelove symboly
$\kappa$	Krivosť
$\mathcal{C}$	Obecná krivka
$\mathcal{S}$	Obecná plocha
$s$	Prirodzený parameter
$H$	Stredná krivosť

# Zoznam použitých obrázkov

3.1	Anuloid . . . . .	13
3.2	Pseudosféra . . . . .	14
3.3	Katenoid . . . . .	15
3.4	Helikoid . . . . .	16
3.5	Deformácia katenoidu na helikoid . . . . .	17
3.6	Valec, kužel a plocha dotýčníc šróbovice . . . . .	18
3.7	Tvoriace krivky pre $b \geq a$ . . . . .	20
3.8	Tvoriace krivky pre $b \leq a$ . . . . .	21
3.9	Rotačné plochy s kladnou konštantnou Gaussovou krivosťou . . . . .	21
3.10	Diniho plocha . . . . .	23
3.11	Kuenova plocha . . . . .	24
3.12	Geodetiky na valci . . . . .	27
3.13	Geodetiky na valci pre $c = 0.5$ . . . . .	30
3.14	Geodetiky na anuloide . . . . .	30
3.15	Geodetiky na kuželi . . . . .	31
3.16	Geodetiky na guli . . . . .	31
3.17	Geodetiky na helikoide . . . . .	32
3.18	Geodetiky na katenoide . . . . .	32